



Предел функции. Непрерывность функции.  
Свойства непрерывных функций



# Предел функции пример

- Ст. 166

1.1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ .



Решение

$$1.1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}.$$

$$\bullet \Rightarrow \frac{4 - 10 + 6}{4 - 24 + 20} = \frac{0}{0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-10)} = \frac{x-3}{x-10} = \frac{2-3}{2-10} = \frac{1}{8}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{4x^2 + 6x - 64}$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{4x^2 + 6x - 64} = \frac{0}{24} = 0. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 3}{2x^3 + 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(10 - 3/x)}{x^3(2 + 4/x^2 + 3/x^3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10 - 3/x}{x^2(2 + 4/x^2 + 3/x^3)} = \frac{10}{\infty} = 0. \blacktriangleleft$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^3 - 4x}{3x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5(2 + 3/x^2 - 4/x^4)}{x^2(3 - 4/x + 2/x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(2 + 3/x^2 - 4/x^4)}{3 - 4/x + 2/x^2} = \frac{-\infty}{3} = -\infty. \blacktriangleleft$$





# Предел функции пример

- Ст. 168

**3.1.** 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$$

Решение

$$\bullet \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$3.1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$$





# Предел функции пример

• Ст. 171      **6.1.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$

Решение

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + x - 12)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x})(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})} &= \frac{(x-3)(x+4)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{2(x-3)} = \\ \frac{(x+4)(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})}{2} &= \frac{(3+4)(\sqrt{3-2} + \sqrt{4-3})}{2} = \frac{7(1+1)}{2} = 7 \end{aligned}$$





# Предел функции пример

- Ст. 172

$$7.1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$



Решение

$$7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}.$$

•  $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x+4}{x+8} - 1 \right)^{-3x} = \left( 1 + \frac{x+4-x-8}{x+8} \right)^{-3x} = \left( 1 + \frac{-4}{x+8} \right)^{-3x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{x+8}{-4}} \right)^{\frac{x+8}{-4}} \right]^{\frac{-3x}{\frac{x+8}{-4}}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x}{x+8/-4}} \Rightarrow e^{\frac{12x}{x(1+\frac{8}{x})}} \Rightarrow e^{\frac{12}{1}}$$



# Предел функции пример

$$9. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi^2 - x^2}$$



Решение 9.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi^2 - x^2}$ .

$$\bullet \Rightarrow \left\{ -\sin a = \cos \left( \frac{\pi}{2} + a \right) \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)}{\pi^2 - x^2} = \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi - x}{2} \right)}{(\pi - x)(\pi + x)}$$

$$\bullet \Rightarrow \left\{ 1 - \cos a = \frac{2 \sin^2 a}{2} \right\} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 \left( \frac{\pi - x}{2} \right)}{(\pi - x)(\pi + x)} = \frac{2 \sin \left( \frac{\pi - x}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi - x}{4} \right)}{4 * \frac{\pi - x}{4} (\pi + x)} \Rightarrow$$

$$\bullet \Rightarrow \frac{1}{2} * \frac{\sin \left( \frac{\pi - x}{4} \right)}{\pi + x} \Rightarrow \frac{1}{2} * \frac{0}{2\pi} = 0$$



# Предел функции пример

• Ст.175

**9.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ .



Решение **9.1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$

$$\bullet \Rightarrow \left\{ 1 - \cos 8x = 2 \sin^2 \frac{8x}{2} \right\} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 4x}{3x^2} * \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 2x}{2x^2} * \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\bullet \Rightarrow \frac{8}{3} \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right]^2 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



# Ст. 178

1. Доказать, что функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.1.  $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ ,  $\varphi(x) = \arcsin x$ .



# Решение

1.1.  $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ ,  $\varphi(x) = \arcsin x$ .

•  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$

- 1)  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\operatorname{tg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\arcsin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 4)  $\operatorname{arctg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 5)  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 6)  $e^x - 1 \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 6a)  $a^x - 1 \sim x \ln a$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 7)  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 8)  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$  при  $x \rightarrow 0$ .



## Пример 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2 - 5x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x(1 - \cos^2 2x)}{x^2(3 - 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin^2 2x}{x^2(3 - 5x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \sin 2x}{2x2x(3 - 5x)} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Ст.179

2. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}$

2.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$



# Решение

$$\bullet \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x^2(x-5)} = \frac{3}{x-5} = \frac{3}{-5}$$

- 1)  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\operatorname{tg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\arcsin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 4)  $\operatorname{arctg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 5)  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 6)  $e^x - 1 \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 6a)  $a^x - 1 \sim x \ln a$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 7)  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- 8)  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$  при  $x \rightarrow 0$ .



# Ст. 180

**3. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.**

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$



# Решение

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

- $\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1-0} (x + 4) = 3$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1+0} (x^2 + 2) = 3$
- $\Rightarrow f(-1) = x + 4 = 3$
- $X = -1$ . непрерывная точка
  
- $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$

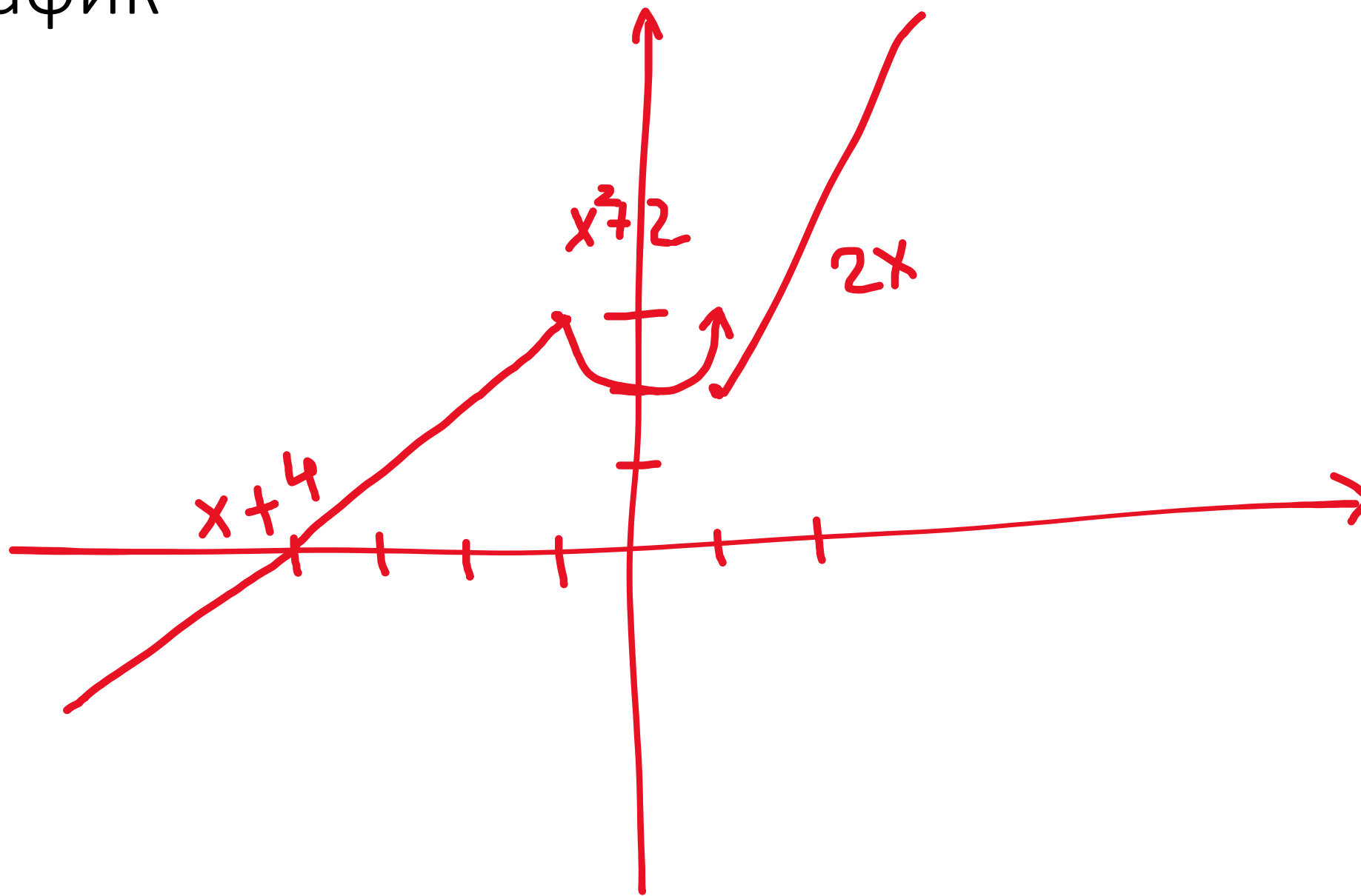


# Решение

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

- $\Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 2) = 3$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1+0} 2x = 2$
- $\Rightarrow f(1) = x^2 + 2 = 3$
- $X=1$ . Точка Разрыва I-го порядка
  
- $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$

# График





# Ст. 183

4. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках.

4.1.  $f(x) = 2^{1/(x-3)} + 1$ ;  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ .



# Решение

$$4.1. f(x) = 2^{1/(x-3)} + 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{1/(x-3)} + 1 = 2^{-\infty} + 1 = 1$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{1/(x-3)} + 1 = 2^{\infty} + 1 = \infty$
- т.е. в точке  $x_1 = 3$  функция терпит бесконечный разрыв
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} 2^{1/(x-3)} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} 2^{1/(x-3)} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\Rightarrow f(4) = 2^{1/(4-3)} + 1 = 3$
- в точке  $x_2 = 4$  функция непрерывна